Realizado por María Luz Franqueiro, Gastón Manestar, Martín Ruiz Palero y Nicolás Valente
Revisó: Liliana I. Perez *Primer Cuatrimestre 2006*

APUNTE NÚMEROS COMPLEJOS (para ser usado en los problemas de Corriente Alterna)

1 Introducción

El objetivo de este resumen es recordar las herramientas elementales para el tratamiento de los **números complejos**, tema necesario para el análisis de **circuitos de corriente alterna**.

<u>Def:</u> El **"Conjunto de números Complejos"** C se define como:

$$C=\{z=x+jy/x,y\in R\wedge j^2=-1\} \quad (1)$$

Así, un número complejo es un par de números reales (a,b) que se puede escribir en la forma $a+jb$. Podrá representarse como un punto en un plano con coordenadas *a* y *b*, o como un vector de componentes *a* y *b*.

Hay, esencialmente, dos formas distintas (aunque equivalentes) de representar un número complejo: la forma binómica y la forma polar (también llamada trigonométrica)

2 Forma binómica

La representación $\boxed{z=x+jy}$ se denomina **forma binómica** y los valores ***x*** e ***y*** se identifican respectivamente como "parte real" y "parte imaginaria":

$$\operatorname{Re} z = x$$
$$\operatorname{Im} z = y \quad (2)$$

2.1 Operaciones elementales en forma binómica

Sean $z_1=x_1+jy_1$ y $z_2=x_2+jy_2$, entonces se tiene:

Suma:	$z_1+z_2=(x_1+x_2)+j(y_1+y_2)$	(3)
Resta:	$z_1-z_2=(x_1-x_2)+j(y_1-y_2)$	(4)
Producto:	$z_1.z_2=(x_1.x_2-y_1.y_2)+j(x_1.y_2+y_1.x_2)$	(5)
División:	$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+j\,y_1}{x_2-j\,y_2}=\frac{x_1+j\,y_1}{x_2-j\,y_2}\,\frac{x_2+j\,y_2}{x_2+j\,y_2}=\frac{(x_1x_2-y_1y_2)+j\,(y_1x_2+x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$	(6)
Igualdad:	$z_1=z_2\Leftrightarrow x_1=x_2$ e $y_1=y_2$	(7)

<u>Número Complejo Conjugado</u> (Se nota $\bar{z}$ o también como z*) . Si

$$z=x+jy\Rightarrow\bar{z}\equiv z^*\equiv x-jy \quad (8)$$

A partir de (8) el producto de un número complejo z por su conjugado z^* resulta

$$z.z^* = (x + j\,y).(x - j\,y) = x^2 + y^2 \qquad (9)$$

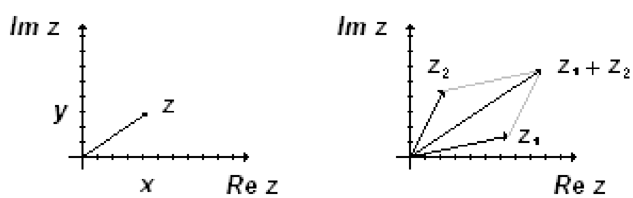
Aplicando la definición de conjugado a la división de 2 complejos, de (6) resulta

División: $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\frac{z_2^*}{z_2^*} \qquad (10)$$

Notar que en la división se multiplica y se divide por el complejo conjugado del divisor, ya que la idea es obtener un resultado en forma de número complejo, es de esa forma que eliminamos la componente imaginaria del denominador.(Esto es similar a la "racionalización" en el álgebra de los reales)

3 Interpretación geométrica

Resulta natural asociar a los números complejos con un plano, análogo a $\boldsymbol{R}^2$, donde el eje horizontal representa la parte *real* de z y el eje vertical su parte *imaginaria*. Esta interpretación geométrica fue introducida por Argand en 1806



De la figura surge claramente (Pitágoras) que, considerando a z como un vector en el plano, su módulo resulta

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (11)$$

Y, en consecuencia, la división de dos complejos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\frac{z_2^*}{z_2^*} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2} \qquad (12)$$

Por otra parte, según las definición de *suma* de dos complejos, la interpretación geométrica resulta análoga a la de vectores libres en $\boldsymbol{R}^2$ (ver figura): la "suma" corresponde a la *regla del paralelogramo*. **Esto se debe tener en cuenta a la hora de realizar diagramas fasoriales en los Problemas de Corriente Alterna.**

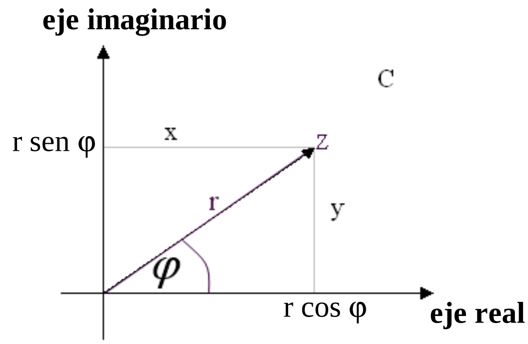
4 Forma polar, trigonométrica y exponencial

Un número complejo del plano se puede representar por un par de valores r y φ, que cumplen:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad tg(\varphi) = \frac{Im(z)}{Re(z)} = \frac{y}{x} \tag{13}$$

Estos valores son llamados módulo y argumento, y son notados respectivamente como

r =|z| y φ=Arg(z). (14)



A partir de la figura, se puede ver que $x = r\cos\varphi$ e $y = r\,sen\varphi$. Por lo tanto, todo número complejo de módulo *r* y argumento φ puede escribirse en la forma polar

$$z = r(\cos\varphi + j\,sen\varphi) \tag{15}$$

Una notación muy usada es $z = r\angle\varphi$

Por otra parte, $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\,sen\varphi$ (si no lo creen, desarrollen en series las funciones a ambos lados de la igualdad y verifiquenlo). Así, un complejo *z* puede notarse como

$$z = r(\cos\varphi + j\,sen\varphi) = r\angle\varphi = r\,e^{j\varphi} \tag{16}$$

Esta forma es muy útil para calcular productos, divisiones y potencias de números complejos.

4.1 Producto y división de dos complejos

Si aplicamos la definición del producto (como en forma binómica) a los complejos $z_1 = r_1\,e^{j\varphi_1}$ y $z_2 = r_2\,e^{j\varphi_2}$, para el producto $z_1 \,.\, z_2$ obtenemos:

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= r_1[\cos(\varphi_1) + j\,sen(\varphi_1)]\cdot r_2[\cos(\varphi_2) + j\,sen(\varphi_2)] = \\ &= r_1.r_2(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - sen(\varphi_1)sen(\varphi_2)) + j\; r_1.r_2\,(sen(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + sen(\varphi_2)\cos(\varphi_1)) = \\ &= r_1.r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + j\,sen(\varphi_1+\varphi_2)] \end{aligned} \tag{17}$$

Es decir,

$$z_1.z_2 = r_1.r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + j\,sen(\varphi_1+\varphi_2)\right] \tag{18}$$

De donde resulta: *El módulo de un producto es el producto de los módulos y el argumento es la suma de los argumentos*

$$\begin{aligned} |z_1.z_2| &= |z_1|.|z_2| \\ Arg(z_1.z_2) &= Arg(z_1) + Arg(z_2) \end{aligned} \tag{19}$$

Si los escribimos como $z_1 = r_1\angle\varphi_1$ y $z_2 = r_2\angle\varphi_2$ Entonces:

$$z_1.z_2 = r_1.r_2\angle\varphi_1 + \varphi_2 \tag{20}$$

Si los hubiéramos escrito como $z_1 = r_1 e^{j\varphi_1}$ y $z_2 = r_2 e^{j\varphi_2}$, el producto está dado por

$$z_1.z_2 = r_1 e^{j\varphi_1} r_2 e^{j\varphi_2} = r_1 r_2 e^{j\varphi_1} e^{j\varphi_2} = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} \tag{21}$$

Es decir, usando las propiedades de las funciones exponenciales, llegamos al resultado en forma sencilla y simple.

Análogamente, para la división de dos complejos $z_1 = r_1\angle\varphi_1$ y $z_2 = r_2\angle\varphi_2$ se obtiene

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle\varphi_1 - \varphi_2 \tag{22}$$

ya que

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j\varphi_1} e^{-j\varphi_2} = r_1 r_2^{-1} e^{j(\varphi_1-\varphi_2)} \tag{23}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = |z_1||z_2|^{-1} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$Arg(z_1 z_2) = Arg(z_1) - Arg(z_2) = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{24}$$

Ejemplo: Hallar el cociente de $z_1 = 1 + j \quad z_2 = 1 - j$

$$|z_1| = \sqrt{2} \quad Arg(z_1) = arctg(1) = 45º = \frac{\pi}{4}$$

$$|z_2| = \sqrt{2} \quad Arg(z_2) = arctg(-1) = -45º = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) + jsen\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right] = 1\left[\cos\frac{\pi}{2} + jsen\frac{\pi}{2}\right]$$

que en forma binómica (desarrollando las operaciones) queda: $\frac{z_1}{z_2} = 1(0 + j\cdot 1) = j$

<u>Observación:</u> la forma $z = 1\left[\cos\frac{\pi}{2} + j.sen\frac{\pi}{2}\right]$ es la forma trigonométrica de z=j.

4.2 Conjugado e inverso de un complejo

<u>Conjugado:</u>

$$\boxed{\bar{z} = r(cos\varphi - j\,sen\varphi) = r\angle-\varphi = re^{-j\varphi}} \tag{25}$$

<u>Inverso:</u>

$$\boxed{z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{j\varphi}} = r^{-1}e^{-j\varphi} = r^{-1}(cos(-\varphi) + j\,sen(-\varphi)) = r^{-1}(cos\varphi - j\,sen\varphi) = r^{-1}\angle-\varphi} \tag{26}$$

4.3 Potencias y raíces de un complejo

A partir de la multiplicación de complejos, se obtiene

Potencia: $z^n = \left(re^{j\varphi}\right)^n = r^n e^{jn\varphi}$ (26)

Raíz: $z^{1/n} = \left(re^{j\varphi}\right)^{1/n} = r^{1/n} e^{j\varphi/n}$ (27)

CUIDADO:

$z_1 + z_2 \neq r_1 + r_2 \angle \varphi_1 + \varphi_2$ $\Leftarrow$ NO ES CIERTO

$z_1 - z_2 \neq r_1 - r_2 \angle \varphi_1 - \varphi_2$ $\Leftarrow$ NO ES CIERTO

Por lo tanto, la suma y resta de complejos no se puede hacer en forma directa usando expresión polar, se utilizará por practicidad la forma binómica, sumando partes reales e imaginarias por separado

Para pasar de polar a binómica:

x = r.cos φ

y = r.sen φ

Para pasar de binómica a polar:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = arctg\left[\frac{y}{x}\right]$$

Ejemplo:

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} j \qquad z_2 = 2 + 0j$$

$$|z_1| = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1 \quad Arg(z_1) = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad z_1 = 1e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$|z_2| = \sqrt{4+0} = 2 \quad Arg(z_1) = 0^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad z_2 = 2e^{j0}$$

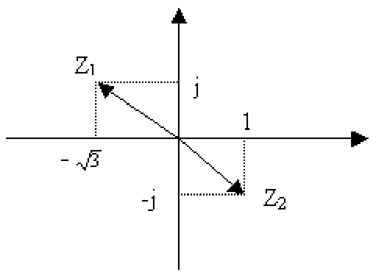
$$\Rightarrow \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{1e^{j\frac{\pi}{4}}}{2e^{j0}} = \frac{1}{2} e^{j\left(\frac{\pi}{4} - 0\right)} = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

Ejemplo: Calcular r=|z| y φ=Arg(z) para: $z_1 = -\sqrt{3} + j$

$z_2 = 1 - j$

-El módulo de z_1 es $|z_1| = \sqrt{3+1} = 2$; su argumento está dado por $tg(\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ lo que determina dos valores posibles de argumento: -30º y 150º; como z_1 está en el segundo cuadrante ha de ser $\varphi = 150^\circ = \frac{5}{6}\pi$

-El módulo de z_2 es $|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; el argumento viene dado por $tg(\varphi) = -1$ lo que puede dar -45º o 135º, y otra vez viendo la posición del vector: $\varphi = -45º = -\dfrac{\pi}{4}$.



En el ejemplo se ha visto que hay que" elegir" el ángulo y para eso hay que ubicar el complejo en el cuadrante que corresponda; otra forma de verlo es la regla que dice que: $signo(\varphi) = signo(y)$ *(en este caso se graficaron los vectores, pero podría haberse utilizado esta regla también).*

5 Aplicación: Suma de dos ondas (desfasadas en un ángulo α)

Sean:

$e_1 = E\,\text{máx}_1.\text{sen}(\omega t)$ $\qquad$ $e_2 = E\,\text{máx}_2.\text{sen}(\omega t + \alpha)$

$$\Rightarrow e_T = E\,\text{máx}_T.\text{sen}(\omega t + \varphi)$$

con:

$$\text{Emáx}_T = \sqrt{(E\,\text{máx}_1)^2 + (E\,\text{máx}_2)^2 + 2.E\,\text{máx}_1.E\,\text{máx}_2.\cos\alpha}$$

$$\varphi = \text{arctg}\left[\frac{E\,\text{máx}_2.\text{sen}(\alpha)}{E\,\text{máx}_1 + E\,\text{máx}_2.\cos(\alpha)}\right]$$

Ejemplo: Sumar dos ondas senoidales conocidas sus expresiones e_1 y e_2:

$$e_1 = 240.sen(314.t + 20°)$$
$$e_2 = 210.sen(314.t + 20° + 60°)$$

$$\Rightarrow e_T = E\,\text{máx}_T.\text{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$Emáx_T = \sqrt{240^2 + 210^2 + 2.240.210.\cos(60°)} = 390V$$

$$tg(\varphi) = \frac{210.sen(60°)}{240 + 210.\cos(60°)} = 0.527$$

Por lo tanto arctg (0,527)= 29,79°

Entonces:

$$e_T = 390.sen(314t + 20° + 27,79°)$$

6 EJERCICIOS

1) Dibujar el plano complejo y situar los siguientes números complejos. Expresar cada uno de ellos en las formas: $z = r\angle\varphi$ y $z = r.e^{j.\varphi}$

   a) $2 - j2$
   b) $3 + j8$
   c) $-5 + j3$
   d) $-4 - j4$
   e) $5 + j0$
   f) $j6$
   g)-4

2) Efectuar la operación que se indica

   a) $z = 3 - j4$ Hallar z.z*
   b) $z = 10\angle -40°$ Hallar z.z*
   c) $z = 20\angle 53{,}1°$ Hallar z+z*
   d) $z = 2{,}5e^{-j\pi/3}$ Hallar z.z*
   e) $z = 2 + j8$ Hallar z-z*
   f) $z = r\angle\theta$ Hallar z/z*

3) Escribir en las formas: $z = r.e^{j.\varphi}$, $z = x + jy$ y $z = r.\cos(\varphi) + j.sen(\varphi)$

   a) $12{,}3\angle 30°$
   b) $53\angle 160°$
   c) $25\angle -45°$
   d) $86\angle -115°$

4) Escribir en las formas: $z = r.e^{j.\varphi}$ y $z = r\angle\varphi$.

   a) $-12 + j16$
   b) $2 - j4$
   c) $-59 - j25$
   d) $700 + j200$

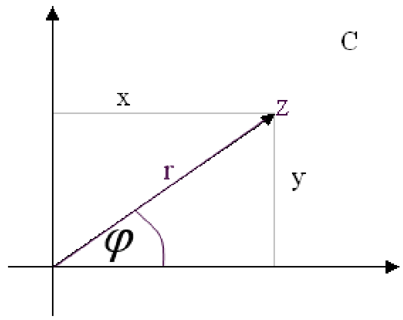
5) Realizar las siguientes operaciones:

   a) $(3 - j2)(1 - j4)$
   b) $j2.(4 - j3)$
   c) $(5 + j5)/(1 - j1)$
   d) $(4 - j8)/(2 + j2)$
   e) $(3\angle 20°)(2\angle -45°)$
   f) $(1\angle 80°)(25\angle -45°)(0{,}2\angle -15°)$
   g) $(180\angle 60°)/(180\angle 50°)$

6) En cada uno de los siguientes casos hallar el valor de la expresión $\dfrac{z_1.z_2}{(z_1 + z_2)}$

   a) $z_1 = 10 + j5$, $z_2 = 20\angle 30°$
   b) $z_1 = 5\angle 45°$, $z_2 = 10\angle -70°$
   c) $z_1 = 6 - j2$, $z_2 = 1 + j8$
   d) $z_1 = 20$, $z_2 = j40$

RESUMEN DE FORMAS EN LAS QUE SE PUEDE EXPRESAR UN COMPLEJO:



$$z = x + jy$$

$$z = r.(\cos(\varphi) + j.sen(\varphi))$$

$$z = r\angle\varphi$$

$$z = r.e^{j.\varphi}$$

Bibliografía utilizada :

Churchill, R. *Variable Compleja y aplicaciones* (1960) , Mc.Graw Hill

Rey Pastor, J., Pi Calleja, P. y Trejo, C. (1963) *Análisis matemático* (Vol. I) (Págs. 126-136) Bs. As., Argentina: Editorial Kapelusz.

Castejón Oliva, A. y Satamaría Herranz, G. (1993) *Tecnología Eléctrica*. Madrid, España: McGraw-Hill/Interamericana de España.

Wunsch, R. *Variable Compleja con aplicaciones* (1994) USA: Addison-Wesley Iberoamericana S. A.

Edminister, J. y Nahvi, M. *Circuitos Eléctricos* (1997) Serie de compendios Shaum, Mc. Graw Hill